# Développements

## 1 Théorème de Fourier-Plancherel

**Références :** RUBIN Walter ; Analyse réelle et complexe : Cours et exercices ; Théorème 9.13 (p225) ; Broché.

**Théorème. —**
Pour toute fonction f $\in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)dx$ est de carré intégrable et $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
La transformation de Fourier se prolonge ainsi à $L^2$ en une isométrie linéaire.
Cette isométrie est de plus bijective.

*Démonstration.*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Nous allons dans un premier temps montrer que $\|\widetilde{f}\|_2 = \|f\|_2 < \infty$.

Pour se faire, définissons $g := x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y).\overline{f(y-x)}dy =< f, \tau_{-x}f >$ où $\tau_u$ est l'opérateur de translation par u : $\tau_u f(y) = f(y+u)$.
On rappelle que cet opérateur de translation vérifie :
$\forall 1 \leq p < \infty$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\tau_u$ est une isométrie linéaire sur $(L^p(\mathbb{R}))$ et la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto \tau_u \in L_C(L^p(\mathbb{R}))$ est continue.

Comme f est dans $L^2(\mathbb{R})$, $\tau_{-x}f$ aussi, donc g(x) est bien définie $\forall x \in \mathbb{R}$. Comme $u \in \mathbb{R} \mapsto \tau_u \in L_C(L^2(\mathbb{R}))$ et que $< f, . >$ est continue sur $L^2(\mathbb{R})$, g est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, vu que f et $\tau_{-x}f$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, l'inégalité de Young appliquée à g pour $p = 1, q = 1$ nous dit que $\|g\|_1 \leq \|f\|_1.\|\tau_{-x}f\|_1 = \|f\|_1.\|f\|_1 < \infty$. Donc $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour $\lambda > 0$, définissons en parallèle $H_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|}$.
Montrons que transformée de Fourier $h_\lambda$ de $H_\lambda$ définit une approximation de l'unité. Celle-ci vaut :
$h_\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-\lambda|x|}.dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{x(-iy+\lambda)}dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{x(-iy-\lambda)}dx = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\lambda-iy} + \frac{1}{\lambda+iy})$
$\Rightarrow h_\lambda(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda}{\lambda^2+y^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2+y^2}$
Donc $h_\lambda \geq 0$ et la fonction est paire.
Soit $a \geq 0$. On a :
$\int_{|x|>a} h_\lambda(x)dx = 2\int_a^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2+y^2}dx = \frac{2}{\pi} \int_a^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{y}{\lambda})^2} \frac{dx}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{a}{\lambda}}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{2}{\pi}[\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{a}{\lambda})]$

Donc $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = 1$ et $\int_{|x|>a} h_\lambda(x)dx \to_{\lambda\to 0} 0$. Ainsi, la famille $(h_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ définit bien une approximation de l'unité.

Comme g est continue bornée et $h_\lambda$ intégrable, le produit de convolution $g * h_\lambda$ est bien défini. Le fait que $(h_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ soit une approximation de l'unité nous dit que $g * h_\lambda(0)$ converge vers $g(0) =< f, \tau_0 f >= \|f\|_2^2$ pour $\lambda \to 0$.
D'autre part, comme g,$H_\lambda$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de Fubini à $g * h_\lambda(0)$ pour avoir :
$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h_\lambda(-x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)h_\lambda(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x).\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} H_\lambda(y)dydx$
$\Rightarrow g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} g(x)H_\lambda(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y).\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|}.dy$

En notant $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, on peut alors écrire que $g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widetilde{f}(y-x)dx = f * \widetilde{f}(y)$.
Donc $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{\widetilde{f}}(y).\sqrt{2\pi}$. Ce terme $\sqrt{2\pi}$ apparaît de par l'introduction du $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ dans la définition de $\widehat{f}$ de l'énoncé.
Et $\widehat{\widetilde{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\overline{f(-x)}dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(-x)dx} = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-iuy} f(u)du} = \overline{\widehat{f}(y)}$.
Donc $\widehat{g}(y) = |\widehat{f}(y)|^2.\sqrt{2\pi}$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\widehat{g}(y)H_\lambda(y) = |\widehat{f}(y)|^2 e^{-\lambda|x|}$ qui converge en croissant vers $|\widehat{f}(y)|^2$ pour $\lambda \to 0$.
Cette convergence est même uniforme sur tout compact car $\inf_{x\in[-N,N]}(e^{-\lambda|x|}) = e^{-\lambda.N}$.

Donc pour tout $N > 0$, $\int_{-N}^{N} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy$ converge en croissant vers $\int_{-N}^{N} |\widehat{f}(y)|^2 dy$ pour $\lambda \to 0$.
Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2 dy = \lim_{N\to\infty} \lim_{\lambda\to 0} \int_{-N}^{N} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy = \lim_{\lambda\to 0} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy = \lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = \|f\|_2^2$ en utilisant le théorème du double supremum.

La transformée de Fourier de f est donc bien dans $L^2(\mathbb{R})$, donc la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vers $L^2(\mathbb{R})$ est bien définie, est linéaire, et est une isométrie car $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
De plus encore, pour $h \in L^2(\mathbb{R})$, $h\big|_{[-N,N]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et $h\big|_{[-N,N]} \to^{\|.\|_2}_{N\to\infty} h$ , donc $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
Le théorème de prolongement des applications linéaires continues s'applique alors et permet de prolonger la transformation de Fourier en une isométrie linéaire $\mathscr{F}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vers $L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que $\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$. Comme $\mathscr{F}$ est une isométrie linéaire, son image est fermée dans $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$ pour conclure.
Soit f dans $\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}))^\perp$.
Pour $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|\alpha - x|}$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est $x \mapsto h_\lambda(\alpha - x)$.
On trouve alors que $0 = \int_{\mathbb{R}} f(x).h_\lambda(\alpha - x)dx = f * h_\lambda(\alpha)$, pour tous $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
Comme $(h_\lambda)_\lambda$ est une approximation de l'unité, pour f continue à support compact, on sait que $f * h$ converge uniformément vers f, donc $f * h$ converge vers f pour $\|.\|_2$.
La densité de $C_c^0(\mathbb{R}) dans L^2(\mathbb{R})$ et le fait que $\|(f-g) * h_\lambda\|_2 \leq \|f - g\|_2.\|h_\lambda\|_1$ permettent d'étendre ce résultat à tout $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Ainsi, $f = \lim_{\lambda\to 0}(f * h_\lambda) \equiv 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, ce qui permet de conclure que $\mathscr{F}$ est bien une isométrie linéaire bijective sur $L^2(\mathbb{R})$.

□